АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

СООБЩЕНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Г.А. АЛЕКСАНДРОВ, Л.Л. ГОЛУБЯТНИКОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ

Вычислительный центр АН СССР

Москва 1991

УДК 519.95:574.4

Ответственный редактор
доктор физ.– матем. наук Д.О. Логофет

В работе рассматривается математическая модель экологического ряда с позиций системной экологии. Приведены алгоритм идентификации этой модели и его математическое обоснование. Показана взаимосвязь и проведено сравнение предлагаемого алгоритма с наиболее распространенными в геоботанических исследованиях методами ординации видов.

Рецензенты: Богатырев Б.Г.
Денисенко Е.А.

Научное издание

© Вычислительный центр
Академии наук СССР, 1991. Св.план 1990, поз.114.

ВВЕДЕНИЕ

Одним из основных свойств растительного покрова является его непрерывность. Основные положения учения о континууме растительности были сформулированы в начале XX века в работах Л.Г.Раменского и Г.Глизона. Сущность принципа континуума растительных сообществ состоит в том, что широкое перекрытие экологических амплитуд и рассредоточенность центров распределения популяций вдоль градиента среды приводит к тому, что большинство сообществ непрерывно переходит одно в другое, и это случается гораздо чаще, чем образование определенных, ясно разграниченных друг от друга сообществ (разумеется, что если градиенты внешней среды дискретны или нарушены пожарами, рубками и т.п., то возникает и дискретность сообществ) [4]. Новая теория распределения сообществ потребовала и новых методов их исследования. Такими методами для анализа континуума растительности явились методы ординации. Ординация – упорядочение видов или сообществ вдоль одной или нескольких осей, каждая из которых отражает либо некоторый природный градиент, либо направление изменения сходства между сообществами или связей между видами. Наиболее часто в практических задачах фитоценологии используются прямой градиентный анализ и метод главных компонент, популярна также и висконсинская ординация [2,5].

Прямой градиентный анализ состоит в том, что описания растительных сообществ разбиваются на классы, в зависимости от величины некоторого фактора среды, затем описывается изменение обилия каждого вида по выделенным классам. Статистический вариант прямого градиентного анализа состоит из двух этапов: на первом этапе эмпирическая линия распределения вида вдоль градиента среды сглаживается до одновершинной колоколовидной (или ее части) с целью снятия разного рода шумов и определяется существенность силы влияния фактора ординации на распределение каждого вида с помощью диспер-

сионного комплекса, второй этап состоит из описания распределения тех видов, которые оказались достоверно сопряженными с градиентом ординации, для этого используются либо кривые регрессии, либо такие показатели как средневзвешенная сопряженность и дисперсия фактора.

Метод полярной ординации (висконсинская ординация) состоит в том, что все описания сообществ, составляющие выборку, сравниваются друг с другом с помощью одного из индексов сходства (если индекс сходства какой–либо пары описаний равен нулю, то одно из этих описаний или оба этих описания исключаются из рассмотрения). В качестве концевых точек 1–й оси ординации выбирают два наиболее несхожих описания. Все оставшиеся описания ранжируют между концевыми точками, определяя их координаты по теореме Пифагора. В качестве концов второй оси выбирают пару описаний, которые наименее схожи друг с другом и занимают среднее положение на первой оси. Все оставшиеся описания распределяются по этой оси способом, описанным выше. Аналогичным образом строятся и последующие оси ординации.Модификацией метода полярной ординации является метод перпендикулярных осей Орлоци. В этом методе первую ось строят также, как и при висконсинской ординации, вторая же ось проходит через описание, наиболее удаленное от первой оси, и перпендикулярно к ней. Этот принцип лежит в основе построения всех последующих осей ординации.

Метод главных компонент заключается в нахождении взаимоперпендикулярных осей наибольшего варьирования видов. Первая ось ординации выбирается так, чтобы разброс проекций видов на эту ось был максимальным. Все последующие оси должны удовлетворять этому же правилу в отношении оставшейся после выделения очередной оси части варьирования и быть перпендикулярными к первой оси и между собой. После выделения некоторого числа главных компонент определяют положения видов в этих осях. Затем определяют координаты каждого сообщества. Координатой сообщества по какой–либо компоненте является сумма произведений каждой нормированной оценки обилия вида, входящего в данное сообщество, на координату этого вида по

выбранной компоненте. Этот метод обладает довольно высокой разрешающей способностью, сравнимой с интуицией опытного геоботаника.

Огромный материал полевых геоботанических наблюдений и лабораторных экофизиологических исследований, как правило, позволяет по видовому составу сообщества приблизительно идентифицировать свойства его местообитания и тем самым выявить причину, по которой именно это сообщество занимает данное местообитание. Поэтому цель настоящей работы состоит не в том, чтобы разработать еще один метод упорядочивания полевых наблюдений, а в том, чтобы объяснить накопленную информацию об экологических рядах с позиций системной экологии, используя развитые в ней модели взаимодействия видов, концепции устойчивости сообществ, понятие экологической ниши. Исходя из этих понятий и концепций, в первом разделе развивается математическая модель экологического ряда. Алгоритм идентификации этой модели излагается во втором разделе. В третьем разделе рассматриваются сравнение и взаимосвязь этого алгоритма с методами ординации. Математическое обоснование алгоритма идентификации приведено в приложении.

1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО РЯДА

Экологический ряд – последовательность фитоценозов, сменяющих друг друга в пространстве вдоль градиента некоторого фактора среды. Например, с удалением от берега увеличивается глубина залегания грунтовых вод или по мере удаления от морского побережья уменьшается засоленность почвы. Смена фитоценозов по градиенту фактора среды может быть объяснена исходя из концепции экологической ниши. Экологической нишей называется такая область некоторого пространства жизненно важных факторов окружающей среды, внутри которой обеспечивается существование вида и вне которой это существование невозможно или маловероятно. Формализация понятия ниши, представленная в книге Свирежева Ю.М. и Логофета Д.О. [3], опирается на понятия "спектр ресурса" и "функция потребления". Экологическим рядам более созвучны такие термины, как "спектр ус-

ловий произрастания" и "функция приспособленности".

1.1. Формализация понятия ниши и модель конкуренции за пространство. Условия произрастания характеризуются некоторым параметром x, а количество площади, доступной для зарастания и имеющей характеристики x, задается функцией K(x). Множество значений x с заданной на нем функцией K(x) называется спектром условий произрастания. Приспособленность вида к условиям произрастания характеризуется некоторой функцией f(x), которая, например, является плотностью нормального распределения со средним x_0 (центр ниши) и дисперсией σ^2 (ширина ниши).

Пусть $N_i(t)$ – площадь, занимаемая i–м видом в момент времени t. Тогда $f_i(x)N_i(t)$ – площадь, занимаемая i–м видом с условиями произрастания x. Можно считать, что произрастание происходит по мальтузианскому закону

$$\frac{d(f_i(x)N_i(t))}{dt} = r_i f_i(x)N_i(t).$$

Влияние конкуренции можно выразить через относительное использование площади с условиями произрастания x :

$$[K(x) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)N_i(t)]/K(x).$$

Тогда динамика i–го вида в условиях произрастания x описывается уравнением

$$f_i(x)\frac{dN_i}{dt} = \frac{r_i N_i}{K(x)} f_i(x)[K(x) - \sum_{j=1}^{n} f_j(x)N_j].$$

Интегрирование по некоторому диапазону условий произрастания дает

$$K_i \frac{dN_i}{dt} = r_i N_i (K_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} N_j),$$

где n – число видов, $K_i = \int_a^b K(x)f_i(x)dx$ – площадь, которую может занять i–й вид в данном диапазоне условий произрастания (емкость ниши), $\alpha_{ij} = \int_a^b f_i(x)f_j(x)dx$ – коэффициент конкуренции между i–м и j–м видами, который характеризует перекрывание их экологических ниш.

1.2. Равновесная видовая структура и ее устойчивость (в пределах пробной площадки). Полученная модель описывает конкуренцию видов в пределах некоторой пробной площадки. Критерием стабильности наблюдаемого сообщества являются [3] условия существования положительного решения системы линейных уравнений

$$AN=K, \qquad (1.1)$$

где $A=\|\alpha_{ij}\|$, $N=\{N_i\}$, $K=\{K_i\}$, $i,j=1,\ldots,n$. Аналитическому исследованию поддается случай $\alpha_{ij}=\alpha^{|i-j|}$, $0<\alpha<1$. Решение системы (1.1) имеет следующий вид [3]:

$$N_1^* = \frac{K_1-\alpha K_2}{1-\alpha^2}, \quad N_n^* = \frac{K_n-\alpha K_{n-1}}{1-\alpha^2}, \qquad (1.2)$$

$$N_i^* = \frac{K_i(1+\alpha^2) - \alpha(K_{i-1}+K_{i+1})}{1-\alpha^2}, \quad i=2,3,\ldots,n-1.$$

Условия на емкость ниши, обеспечивающие положительность N^*:

$$\alpha K_i < K_{i+1} < K_i/\alpha. \qquad (1.3)$$

Если диапазон условий произрастания, соответствующий данной пробной площадке, достаточно узок, то можно упорядочить виды по их приспособленности. При таком упорядочении $K_1>K_2>\ldots>K_n$. Следует ли из этого, что $N_1^*>N_2^*>\ldots>N_n^*$?

Из (1.3) следует, что $N_1^*>N_2^*$. Действительно, $(1-\alpha^2)(N_1^*-N_2^*)=$ $=(K_1-K_2)+\alpha(K_1-K_2)+\alpha(K_3-\alpha K_2)>0$, поскольку $K_1>K_2$ и $K_3>\alpha K_2$, согласно (1.3). $N_i^*>N_{i+1}^*$ $(i=2, \ldots, n-2)$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{K_i-K_{i+1}}{K_{i-1}-K_{i+2}} > \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}. \qquad (1.4)$$

Действительно, $(1-\alpha^2)(N_i^*-N_{i+1}^*)=(1+\alpha+\alpha^2)(K_i-K_{i+1})-\alpha(K_{i-1}-K_{i+2})$. Если $(1-\alpha^2)(N_i^*-N_{i+1}^*) > 0$, то $(1+\alpha+\alpha^2)(K_i-K_{i+1}) > \alpha(K_{i-1}-K_{i+2})$, и наоборот. $N_{n-1}^*>N_n^*$, тогда и только тогда, когда

$$\frac{K_{n-1}-K_n}{K_{i-2}-\alpha K_n} > \frac{\alpha}{1+\alpha+\alpha^2}. \qquad (1.5)$$

Действительно, $(1-\alpha^2)(N_{n-1}^*- N_n^*)=(1+\alpha+\alpha^2)(K_{n-1}-K_n)-\alpha(K_{n-2}-\alpha K_n)$. Нетрудно заметить, что при равномерном изменении K_i, т.е. $K_i-K_{i+1}=\text{const}$ условие (1.5) выполняется для любой плотности упаковки видов, характеризуемой значением α. Условие (1.4) при

высокой плотности упаковки ($\alpha \to 1$) нарушается.

1.3. Формулировка модели экологического ряда. Пусть $\{y_1,\dots, y_n\}$ – некоторое разбиение множества условий произрастания, n – число видов. Обозначим через b_{ij} площадь, занимаемую i–м видом в j–м диапазоне условий произрастания. Полученная матрица $B=\|b_{ij}\|$ размерности n*n дает формализованное описание смены сообществ в пространстве, подобно тому, как рассмотренная система дифференциальных уравнений дает формализованное описание изменений во времени. Поэтому матрицу $B=\|b_{ij}\|$ можно назвать моделью экологического ряда. Чтобы усилить наглядность модели введем новую матрицу $A=\|a_{ij}\|$, элементы которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ при } b_{ij} > q, \\ 0, \text{ при } b_{ij} < q, \end{cases}$$

где q – некоторая пороговая величина, начиная с которой вид считается "отсутствующим". Из предыдущих рассуждений и концепции континуума растительных сообществ можно сделать вывод, что матрица A должна иметь вид, так называемой уточненной ленточной матрицы, которая определяется следующим образом. Пусть заданы два целочисленных вектора $W=(w_1,\dots w_N)$, $K=(k_1,\dots k_N)$, такие, что

$$k_j>0 \ (\forall j=\overline{1,N}),\ w_{j+1}\geq w_j\geq 0,\ w_j+k_j\leq w_{j+1}+k_{j+1} \ (\forall j=\overline{1,N-1}). \quad (1.6)$$

Если (M*N)–матрица $X=\|x_{ij}\|$ такова, что $\forall\ i=\overline{1,M},\ j=\overline{1,N}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \text{при } w_j < i \leq k_j + w_j \\ 0 \quad \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.7)$$

то матрица X называется уточненной ленточной матрицей (УЛМ), а вектора W и K – векторами, определяющими УЛМ. Заметим, что для фиксированного столбца j уточненной ленточной матрицы w_j – это число нулевых элементов, стоящих в этом столбце до первого ненулевого элемента в нем, k_j – это число ненулевых элементов в столбце.

Как правило, вид данных геоботанических описаний не соответствует предлагаемой модели. Это связано, во–первых, с тем, что заложенные серии пробных площадей не всегда являются разбиением множества условий произрастания, во–вторых, виды в списках не

упорядочены по градиенту изучаемого фактора среды. Последнее может быть исправлено с помощью специальной процедуры предлагаемой в следующем разделе.

2. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Алгоритм идентификации модели экологического ряда основан на качественных данных о наличии видов в растительных сообществах. Исходная геоботаническая информация оформляется в виде квадратной матрицы, строки которой образуют описания сообществ, расположенные в порядке возрастания величины фактора среды, а столбцы – неординированные виды. Таким образом, получается исходная матрица $A=\|a_{ij}\|$, $(i,j=\overline{1,N})$, где $a_{ij}=1$, если j–й вид есть в i–м описании и $a_{ij}=0$, если j–го вида нет в i–м описании.

Согласно приведенной в разд. 1 модели экологического ряда, матрица $A=\|a_{ij}\|$ должна иметь вид уточненной ленточной матрицы. В основе предлагаемого метода индентификации лежит алгоритм приведения исходной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ к уточненной ленточной матрице $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ij}\|$. Этот алгоритм состоит в нахождении перестановки столбцов исходной матрицы, в результате которой матрица приобретает вид уточненной ленточной.

Формализуем поставленную задачу, покажем ее корректность и опишем метод приведения исходной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ к уточненной ленточной $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$. Для этих целей определим целевую функцию следующим образом. Пусть $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ – некоторая квадратная матрица, состоящая из 0 и 1. Для каждого ее j–го столбца определим числа q_j,p_j,b_j,n_j:

$$q_j = \min_{\substack{i=\overline{1,N}\\ x_{ij}\neq 0}} i, \qquad p_j = \max_{\substack{i=\overline{1,N}\\ x_{ij}\neq 0}} i, \qquad b_j=\min(j,q_j), \quad n_j=\max(j,p_j).$$

Определим целевую функцию $F(X)$:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} (j-i)^2\, \varphi_{ij}, \qquad (2.1)$$

где $\varphi_{ij} = \begin{cases} 2 \text{ при } b_j < i < n_j,\ x_{ij}=0 \\ x_{ij} \quad \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$

Сформулируем утверждение (доказательство приведено в прило– жении). Пусть R – множество матриц, состоящее из уточненной лен– точной матрицы $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$, и матриц, отличающи.ся от мат– рицы X только порядком расстановки столбцов. Тогда если F – фун– кция, определяемая по формуле (2.1), то $\min_{z \in R} F(Z)=F(X)$.

Из этого утверждения следует, что задача приведения исходной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ к уточненной ленточной $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$, сво– дится к нахождению такой перестановки столбцов матрицы A, при которой получаемая матрица минимизирует функцию F , определяемую формулой (2.1), причем, как это следует из утверждения, такая пе– рестановка матрицы A единственна.

Не составляет сложности свести задачу нахождения указанной перестановки столбцов матрицы A к решению частного случая транс– портной задачи линейного программирования, а именно, – к решению задачи о назначениях. Действительно, имея исходную матрицу A, опре– делим матрицу $C=\|c_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$, элементы c_{ij} которой вычисляются по формуле $c_{ij}=\sum_{k=1}^{N}(k-i)^2\varphi_{kj}$, где φ_{kj} определяется также, как и в формуле (2.1), т.е. c_{ij} – "вклад" элементов j–го столбца матри– цы A в сумму F(A), если этот столбец будет занимать i–е место в матрице. Таким образом, поставленная задача будет решена, если решать задачу о назначениях j столбцов матрицы A на j мест так, чтобы суммарная "стоимость" этих "назначений", определяемая по формуле (2.1), была минимальна. Задача о назначениях решается, например, с помощью алгоритма, получившего название венгерского метода [1].

Тем самым доказано, что для каждой исходной матрицы $A=\|a_{ij}\|$ существует и единственна уточненная ленточная матрица $\tilde{A}=\|\tilde{a}_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$, которая получается из исходной матрицы A перестановкой столбцов и минимизирует функцию F, определяемую формулой (2.1).

3. СРАВНЕНИЕ И ВЗАИМОСВЯЗЬ С МЕТОДАМИ ОРДИНАЦИИ

Предлагаемый алгоритм, рассматриваемый как метод ординации

видов растений, математически корректен и лишен основного недостатка многих других методов ординации – линейности. Его применение при правильном подборе геоботанических данных позволяет расположить виды, составляющие исходную информацию в соответствии с изменением выбранного фактора среды. Этот метод выгодно отличается от других известных методов ординации [2] простотой алгоритма, наглядностью и интерпретируемостью получаемых результатов.

Поставим задачу ординации видов и сравним результаты ординации, полученные с помощью предлагаемого метода,с результатами применения наиболее распространенных методов ординации. Проиллюстрируем эти результаты на данных, представленных матрицей K. Каждый столбец этой матрицы содержит информацию об одном и том же виде,

$$K = \begin{bmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{bmatrix}$$

строки – соответствуют сообществам. Виды и сообщества ординированы в соответствии с некоторым фактором среды. Для наглядного представления результатов в дальнейшем поставим в соответствие видам и сообществам номера строк и столбцов, занимаемых ими в матрице.

Как бы не были расставлены виды при правильно ординированных сообществах, предлагаемый метод восстанавливает порядок следования видов, заданный в матрице K, т.е. при любой расстановке столб–

цов этой матрицы метод позволяет восстановить ее исходный вид.

Рассмотрим метод полярной (висконсинской) ординации как метод для ординации видов. Эту ординацию также, как и предлагаемый метод, отличает простота алгоритма. Однако, хотя полярная ординация и дает на некоторых данных удовлетворительные и интересные результаты, этот метод математически некорректен, так как, во–первых, мера сходства, используемая этим методом, может менять свой масштаб от одной пары исследуемых объектов к другой, во–вторых, эта мера сходства не всегда удовлетворяет правилу треугольника, хотя при определении координат сообществ это правило используется [5], кроме того, получаемые оси ординации не перпендикулярны, т.е. они зависимы. К недостаткам метода полярной ординации относится и ограниченность его использования: он эффективен при обработке совокупностей растительных группировок, имеющих очень ограниченное разнообразие. Модификация алгоритма полярной ординации Л.Орлоци позволяет выделить перпендикулярные оси, но все остальные из указанных недостатков присущи этому методу. Висконсинская ординация, примененная к данным, представленным матрицей K, позволяет выделить одну ось и проординировать только четыре вида из 20 данных. Результат ординации приведен на рис.1. Модификация этого метода Л.Орлоци позволяет выделить еще и вторую ось, проходящую перпендикулярно первой, ее концевой точкой является вид 11. Однако определить координаты оставшихся видов на этой оси невозможно из–за того, что используемая мера сходства (коэффициент Дайса) не удовлетворяет правилу треугольника.



Рис. 1. Результат ординации видов методом полярной ординации.

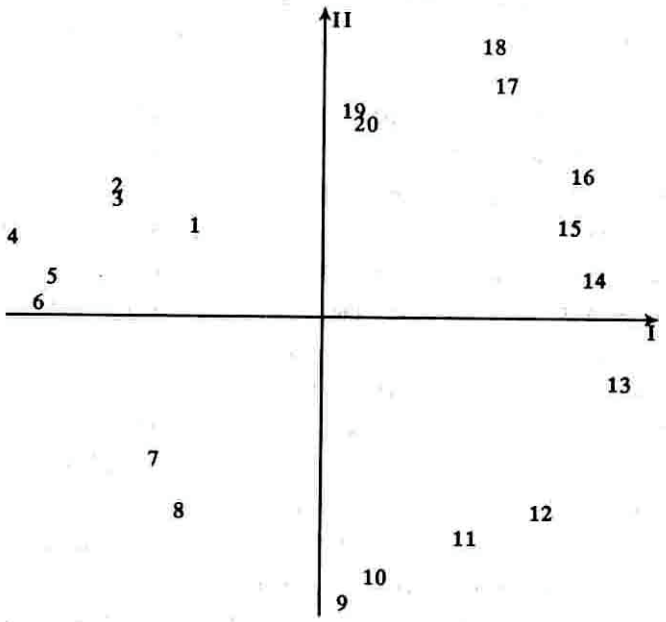


Рис. 2. Диаграмма распределения видов в первых двух главных осях проординированных методом главных компонент.

Из результатов следует, что применение этих методов к данной совокупности видов не достигает цели в поставленной задаче.

Метод главных компонент отличается от многих известных методов ординации своей формализованностью и математической корректностью. Но его отличает и ряд недостатков. Главными из них являются: его линейность, при нелинейном характере экологических отношений, и "чувствительность" к различным масштабам измерения исходных данных [5]. В силу этих причин, метод главных компонент как метод ординации эффективен только для выборок узкого эколого–фитоценотического диапазона. В противном случае, оси ординации, выделяемые этим методом, сложно, а порой и невозможно интерпретировать реальными факторами среды или комплексными градиентами [5]. Результаты ординации видов методом главных компонент применительно к данным, представленным матрицей K, приведены рис.2 в виде ди–

аграммы распределения видов в первых двух главных осях. Варьирование видов выборки вдоль этих осей составляет 24% и 20% соответственно.

Из результатов, полученных с помощью метода главных компонент, также невозможно сделать вывод о правильном упорядочивании видов вдоль выбранного градиента среды.

Прямой градиентный анализ дает возможность проследить характер распределения видов, выявить индивидуальные кривые распределений видовых популяций по градиентам среды. Однако эффективность любого метода ординации определяется степенью его формализованности. Для применения формализованного прямого градиентного анализа, носящего название статистического варианта, необходим достаточно большой объем геоботанической информации. Например, этот метод, примененный к данным, представленным в матрице К, требует дополнительной информации для анализа распределения видов 3,4,10, 15,16,17, и более того, этот метод неприменим к виду 10, если в основе метода лежит статистический критерий квадрата корреляционного отношения. Следует заметить так же, что применение этого метода ординации не дает прямого ответа об упорядочивании видов.

Таким образом, предлагаемый метод ординации позволяет упорядочить виды растительности сколь угодно большого эколого–фитоценотического диапазона. Достичь такого же результата с помощью, например, полярной ординации, метода перпендикулярных осей Орлоци или с помощью широко применяемого сегодня анализа главных компонент, невозможно, так как все эти методы эффективны лишь при работе с совокупностями растительных группировок с очень ограниченным разнообразием. Метод имеет преимущества и перед сходным с ним прямым градиентным анализом, так как существуют исходные геоботанические данные, на которых прямой градиентный анализ неприменим в виду недостатка информации, в то время как предложенный метод дает правильный результат.

В работе составлена математическая модель экологического ряда, основанная на концепциях системной экологии и принципе континуума растительных сообществ. Эта модель задается в виде уточненной ленточной матрицы. Проблема идентификации предложенной модели формализуема и сводится к известной задаче о назначениях, которую возможно решить стандартным венгерским методом. Предложенный алгоритм идентификации модели математически корректен и реализуем на ЭВМ. Его можно рассматривать и как метод ординации видов вдоль одного из жизненно важных факторов среды. Для этого метода характерна простота реализации, информативность и интерпретируемость результата.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математическое обоснование алгоритма идентификации

Для обоснования предложенного в разд. 2 алгоритма сформулируем и докажем ряд лемм, утверждений и теорему, введем необходимые для этой цели определения.

Определение. Транспозиция (α_i,α_j) называется инверсионной, если в полученной при этой транспозиции перестановке пара (α_i,α_j) образует инверсию.

Замечание 1. Из определения УЛМ следует, что если в УЛМ $X=\|x_{il}\|$ $(i=\overline{1,M},\ l=\overline{1,N})$ зафиксированы два столбца с номерами j и r, причем $j<r$, то возможны только два принципиально различных варианта взаимного расположения ненулевых элементов j–го и r–го столбцов, а именно: вариант I, характеризующийся неравенством $w_j+k_j>w_r$, вариант II, характеризующийся неравенством $w_j+k_j\leq w_r$. Учитывая неравенства (1.6), для варианта I получаем

$$w_j\leq w_r< w_j+k_j\leq w_r+k_r, \qquad (1')$$

для варианта II – $w_j<w_j+k_j\leq w_r<w_r+k_r$. (2')

Далее полагаем, что уточненная ленточная матрица является

квадратной матрицей, не содержащей одинаковых столбцов. Заметим, что если матрица $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ отличается от УЛМ только порядком расстановки столбцов, то для этой матрицы существуют два целочисленных вектора $W=(w_1,...w_N)$ и $K=(k_1,...k_N)$, $(w_j>0$, $k_j>0$, $j=\overline{1,N})$,такие, что

$$x_{ij}=\begin{cases} 1 \text{ при } w_j<i\leq w_j+k_j \\ 0 \text{ во всех остальных случаях} \end{cases} \quad \forall\ i,j=\overline{1,N}. \qquad (3')$$

Назовем вектора W и K векторами, определяющими матрицу X.

Полагаем, что матрица $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ является либо УЛМ, либо отличающейся от УЛМ только порядком расстановки столбцов.

Запишем формулу (2.1) в следующем виде $F(X)=\sum_{j=1}^{N} F_j(X)$, (4')

где $F_j(X)$–вклад элементов j–го столбца матрицы X в функцию F(X). Допустим,что зафиксирован некоторый j–й столбец матрицы X. Тогда $F_j(X)$, согласно формуле (2.1), имеет вид

$$F_j(X)=\sum_{i=1}^{N}(j-i)^2\ \varphi_{ij}=\sum_{i=b_j}^{n_j}(j-i)^2\ \varphi_{ij}\ . \qquad (5')$$

Из формулы (5') следует, что вклад элементов каждого столбца матрицы X в функцию F(X) зависит от взаиморасположения диагонального элемента матрицы, принадлежащего этому столбцу и ненулевых элементов этого же столбца матрицы. Рассмотрим, какой вид принимает формула (5') при различных расположениях диагонального элемента матрицы X, принадлежащего фиксированному j–му столбцу, относительно ненулевых элементов этого же столбца. Так как ненулевые элементы столбца находятся в строках с номерами от w_j+1 до w_j+k_j, то возможны только три варианта взаимного расположения j–й строки и группы строк $(w_j+1)\div(w_j+k_j)$: (1) $w_j+1\leq j\leq w_j+k_j$, (2) $1\leq j<w_j+1$, (3) $w_j+k_j<j<N$.

В случае $w_j+1\leq j\leq w_j+k_j$, т.е. $x_{ij}\neq 0$, величины b_j и n_j, определяющие для j–го столбца величину φ_{ij} в формуле (2.1), имеют значения $b_j=w_j+1$, $n_j=w_j+k_j$ и $x_{ij}=1$ при $b_j\leq i\leq n_j$. Следовательно, в рассматриваемом случае формула (5') имеет вид

$$F_j(X)=\sum_{i=b_j}^{n_j}(j-i)^2 = \sum_{i=w_j+1}^{w_j+k_j}(j-i)^2 \quad . \qquad (6')$$

Рассмотрим слагаемые этой суммы: при i=j слагаемое равно 0, при i=j–1 – 1^2, при i=j–2 – 2^2, ... , при $i=w_j+1$ – $(j-(w_j+1))^2$, при i=j+1 – 1^2, при i=j+2 – 2^2, ... , при $i=w_j+k_j$ – $((w_j+k_j)-j)^2$. Следовательно, формулу (6') можем записать в виде

$$F_j(X) = \sum_{i=0}^{j-(w_j+1)} i^2 + \sum_{i=0}^{(w_j+k_j)-j} i^2 = \sum_{i=0}^{\varrho} i^2 + \sum_{i=0}^{\theta} i^2, \qquad (7')$$

где $\varrho=j-(w_j+1)$ – число ненулевых элементов j–го столбца, расположенных выше x_{ij}, $\theta=(w_j+k_j)-j$ – число ненулевых элементов j–го столбца, расположенных ниже x_{ij} .

В случае $1<j<w_j+1$, т.е. $x_{ij}=0$, величины b_j и n_j имеют значения $b_j=j$, $n_j=w_j+k_j$ и $x_{ij}=0$ при $j<i<w_j$, $x_{ij}=1$ при $w_j+1<i<w_j+k_j$. Следовательно, в рассматриваемом случае формула (5') имеет вид

$$F_j(X) = \sum_{i=j}^{w_j} 2(j-i)^2 + \sum_{i=w_j+1}^{w_j+k_j}(j-i)^2. \qquad (8')$$

Рассмотрим слагаемые этой суммы: при i=j слагаемое равно 0, при i=j+1 – $2*1^2$, ..., при $i=w_j$ – $2*(w_j-j)^2$, при $i=w_j+1$ – $(w_j+1-j)^2$, ..., при $i=w_j+k_j$ – $(w_j+k_j-j)^2$.

Следовательно формулу (8') можно записать в виде

$$F_j(X) = \sum_{i=0}^{\varrho} 2i^2 + \sum_{i=0}^{\theta}(\varrho+i)^2, \qquad (9')$$

где $\varrho=w_j-j$ – число нулевых элементов j–го столбца, лежащих между x_{ij} и первым ненулевым элементом этого столбца, $\theta=k_j$ – число ненулевых элементов j–го столбца.

В случае $w_j+k_j<j<N$, т.е. $x_{ij}=0$, величины b_j и n_j имеют значения: $b_j=w_j+1, n_j=j$ и $x_{ij}=1$ при $w_j+1<i<w_j+k_j$ $x_{ij}=0$ при $w_j+k_j<i<j$. Следовательно, в рассматриваемом случае формула (5') имеет вид

$$F_j(X) = \sum_{i=w_j+1}^{w_j+k_j} (j-i)^2 + \sum_{i=w_j+k_j+1}^{j} 2(j-i)^2. \qquad (10')$$

Рассмотрим слагаемые этой суммы: при i=j слагаемое равно 0, при i=j–1 – $2*1^2$, при i=j–2 – $2*2^2$, ... ,

при $i=w_j+k_j+1$ – $2*(j-(w_j+k_j+1))^2$

при $i=w_j+k_j$ – $(j-(w_j+k_j))^2$, при $i=w_j+k_j-1$ – $(j-(w_j+k_j-1))^2$,...,

при $i=w_j+1$ – $(j-(w_j+1))^2$.

Следовательно, формулу (10') можно записать в виде

$$F_j(X) = \sum_{i=0}^{\varrho} 2i^2 + \sum_{i=0}^{\theta} (\varrho+i)^2,$$

где $\varrho=j-(w_j+k_j)-1$ – число нулевых элементов j–го столбца, лежащих между последним ненулевым элементом этого столбца и элементом x_{jj}, $\theta=k_j$ – число ненулевых элементов j–го столбца. Заметим, что полученная формула тождественна формуле (9').

Таким образом, если в рассматриваемом j–м столбце исходной матрицы X диагональный элемент x_{jj} – нулевой, то формула (5') имеет вид

$$F_j(X) = \sum_{i=0}^{\varrho} 2i^2 + \sum_{i=0}^{\theta} (\varrho+i)^2, \qquad (11')$$

где ϱ – число нулевых элементов j–го столбца, расположенных между элементом x_{jj} и ближайшим к нему ненулевым элементом этого столбца, θ – число ненулевых элементов j–го столбца.

Замечание 2. Обозначим через P_{jr} преобразование (M*N) – матрицы $X=\|x_{ij}\|$, переставляющее ее j–й и r–й столбцы. Пусть матрица $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ является УЛМ или отличается от УЛМ только порядком расстановки столбцов, т.е. для матрицы X существуют определяющие ее вектора $W=(w_1,...,w_N)$ и $K=(k_1,...,k_N)$. Если матрица $\tilde{X}=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ такова, что $\tilde{X}=P_{jr}(X)$, то из определения преобразования P_{jr} следует:

1) для компонент векторов $\tilde{W}=(\tilde{w}_1,...,\tilde{w}_N)$ и $\tilde{K}=(\tilde{k}_1,...,\tilde{k}_N)$, определяющих матрицу $\tilde{X}$, выполнены равенства

$$\tilde{w}_j=w_r,\ \tilde{w}_r=w_j,\ \tilde{k}_j=k_r,\ \tilde{k}_r=k_j;\ \tilde{w}_l=w_l,\ \tilde{k}_l=k_l \quad (l\neq j, l\neq r,\ l=\overline{1,N});$$

2) $F_\Sigma(X)=F_\Sigma(\tilde{X})$, где $F_\Sigma(X)(F_\Sigma(\tilde{X}))$ – вклад в функцию F(X) ($F(\tilde{X})$), определяемую формулой (2.1),элементов всех столбцов матрицы $X(\tilde{X})$, кроме элементов j–го и r–го столбцов, и, следовательно,

$$\Delta F=F(\tilde{X})-F(X)=F_j(\tilde{X})+F_r(\tilde{X})-F_j(X)-F_r(X)\ . \qquad (12')$$

Теорема. Пусть матрица $X=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ является УЛМ, матрица $Z=\|z_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ отличается от матрицы X только порядком расстановки столбцов, тогда если F – функция, определяемая формулой (2.1), то F(X)<F(Z).

Доказательство теоремы основано на следующих леммах и утверждениях. Отметим, что в формулировках лемм 1 и 2 предполагается, что (1) задана матрица $X=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$, являющаяся УЛМ или отличающаяся от УЛМ только порядком расстановки столбцов, которую определяют вектора $W=(w_1,...,w_N)$, $K=(k_1,...,k_N)$; (2) матрица $\tilde{X}=\|\tilde{x}_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ такова, что $\tilde{X}=P_{jr}(X)$; (3) функция F определяется формулой (2.1).

Лемма 1. Если в матрице X существуют два столбца, номера которых j и r удовлетворяют одному из неравенств (а)–(р)

(а) $w_r<j<r\leq w_j+k_j$ (з) $1\leq j\leq w_j<r\leq w_r$

(б) $1\leq j<r\leq w_j$ (и) $1\leq j\leq w_j,\ w_r<r\leq w_j+k_j$

(в) $w_r+k_r<j<r\leq N$ (к) $w_j<j\leq w_r,\ w_r+k_r<r\leq N$

(г) $1\leq j\leq w_j,\ w_r+k_r<r\leq N$ (л) $w_r<j\leq w_j+k_j,\ w_r+k_r<r\leq N$

(д) $w_j+k_j<j\leq w_r+k_r<r\leq N$ (м) $w_j<j\leq w_r,\ w_j+k_j<r\leq w_r+k_r$

(е) $1\leq j\leq w_j,\ w_j+k_j<r\leq w_r+k_r$ (н) $w_r<j\leq w_j+k_j<r\leq w_r+k_r$

(ж) $w_j+k_j<j<r\leq w_r+k_r$ (п) $w_j<j<r\leq w_r$

(р) $w_j<j\leq w_r<r\leq w_j+k_j$

и для j–й и r–й компонент векторов W и K выполняются неравенства (1'), то $F(X)<F(\tilde{X})$.

Доказательство. Пусть j и r удовлетворяют неравенствам (а), тогда из условий леммы следует, что для столбцов с номерами j и r как матрицы X, так и матрицы $\tilde{X}$, применима формула (4.7). Учитывая замечание 2 и условия леммы, введем следующие обозначения:

$t=w_r-w_j=\tilde{w}_j-\tilde{w}_r$ – число строк, содержащих одновременно ненулевые элементы j–го столбца и нулевые элементы r–го столбца матрицы X, для матрицы $\tilde{X}$ – это число строк, содержащих одновременно нулевые элементы j–го столбца и ненулевые элементы r–го столбца;

$m=j-w_r-1=j-\tilde{w}_j-1$ – число строк матрицы X или матрицы $\tilde{X}$, содержащих одновременно нулевые элементы и j–го, и r–го их столбцов, которые расположены выше j–й строки;

$u=r-j+1$ – число строк матрицы X или матрицы $\tilde{X}$, которые находятся между j–й и r–й строками этих матриц, включая сами строки j, r;

$p=w_j+k_j-r=\tilde{w}_r+\tilde{k}_r-r$ – число строк матрицы X или матрицы $\tilde{X}$, содержащих одновременно нулевые элементы и j–го, и r–го их столбцов, которые расположены выше j–й строки;

$v=w_r+k_r-(w_j+k_j)=\tilde{w}_j+\tilde{k}_j-(\tilde{w}_r+\tilde{k}_r)$ – число строк, содержащих одновременно нулевые элементы j–го столбца и ненулевые элементы r–го столбца матрицы X, для матрицы $\tilde{X}$ – это число строк, содержащих одновременно ненулевые элементы j–го столбца и нулевые элементы r–го столбца.

В условиях леммы $t\geq 0$, $m\geq 0$, $u\geq 2$, $p\geq 0$, $v\geq 0$, причем t и v одновременно не нули, так как матрица X не содержит одинаковых столбцов. В соответствии с введенными обозначениями

$$F_j(X)=\sum_{i=0}^{m+t} i^2+\sum_{i=0}^{u-1+p} i^2, \qquad F_r(X)=\sum_{i=0}^{u-1+m} i^2+\sum_{i=0}^{p+v} i^2,$$

$$F_j(\tilde{X})=\sum_{i=0}^{m} i^2+\sum_{i=0}^{u-1+p+v} i^2, \quad F_r(\tilde{X})=\sum_{i=0}^{u-i+m+t} i^2+\sum_{i=0}^{p} i^2.$$

Определим знак разности $\Delta F=F(\tilde{X})-F(X)$. Используя формулу (12'), получаем $\Delta F=2(u-1)\left(\sum_{i=0}^{v} i+\sum_{i=0}^{t} i+pv+mt\right)+(u-1)^2(v+t)$. Так как $u\geq 2$ и v, t одновременно не нули в условиях леммы, то $\Delta F>0 \Rightarrow F(X)<F(\tilde{X})$.

Доказательство утверждения леммы для случаев j и r, удовлетворяющих неравенствам (б)–(р), аналогично.

Лемма 2. Если в матрице X существуют два столбца, номера которых j и r удовлетворяют одному из неравенств (а)–(р)

(а) $1 \le j < r \le w_j$

(б) $1 \le j \le w_j$, $w_j + k_j < r \le w_r$

(в) $1 \le j \le w_j$, $w_r + k_r < r \le N$

(г) $w_j + k_j < j < r \le w_r$

(д) $w_j + k_j < j \le w_r$, $w_r + k_r < r \le N$

(е) $w_r + k_r < j < r \le N$

(ж) $w_r < j \le w_r + k_r < r \le N$

(з) $1 \le j \le w_j$ $w_r < r \le w_r + k_r$

(и) $w_j + k_j < j \le w_r < r \le w_r + k_r$

(к) $w_r < j < r \le w_r + k_r$

(л) $1 \le j \le w_j < r \le w_j + k_j$

(м) $w_j \le j \le w_j + k_j$ $w_r + k_r < r \le N$

(н) $w_j < j \le w_j + k_j < r \le w_r$

(п) $w_j < j \le w_j + k_j$, $w_r < r \le w_r + k_r$

(р) $w_j < j < r \le w_j + k_j$

и для j–й и r–й компонент векторов W и K выполняются неравенства (2'), то $F(X) < F(\tilde{X})$.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

Определение. Пусть матрица $X = \|x_{il}\|$ $(i,l = \overline{1,N})$ является УЛМ, матрица $Z = \|z_{il}\|$ $(i,l = \overline{1,N})$ отличается от матрицы X только порядком расстановки столбцов и α–й столбец матрицы X тождественен j–му столбцу матрицы Z. Назовем число α первоначальным номером j–го столбца матрицы $Z = \|z_{il}\|$

Лемма 3. Если в матрице $X = \|x_{il}\|$ $(i,l = \overline{1,N})$, являющейся УЛМ или отличающейся от УЛМ только порядком расстановки столбцов, выделены два столбца с номерами j и r, причем $j < r$ и первоначальные номера которых, соответственно α и β, удовлетворяют неравенству $\alpha < \beta$, то все возможные варианты расположения j–й и r–й строк заданной матрицы относительно строк, содержащих ненулевые элементы выделенных j–го и r–го ее столбцов, описываются неравенствами (а)–(р) в условиях лемм 1, 2 и только ими.

Доказательство. Из данных леммы следует, что для заданной матрицы $X = \|x_{il}\|$ $(i,l = \overline{1,N})$: (1) существуют два целочисленных вектора $W = (w_1,\ldots,w_N)$ и $K = (k_1,\ldots,k_N)$ такие, что $w_l > 0$, $k_l > 0$, $\forall$ $l = \overline{1,N}$ и так как $j < r$, $\alpha < \beta$, то $w_j \le w_r$ и $w_j + k_j \le w_r + k_r$; (2) ненулевые элементы

j–го столбца матрицы X занимают все строки от (w_j+1)–й включительно до (w_j+k_j)–й включительно, ненулевые элементы r–го столбца занимают все строки от (w_r+1)–й включительно до (w_r+k_r)–й включительно. Так как $\alpha<\beta$, то в силу замечания 1 возможны только два принципиально различных варианта взаимного расположения ненулевых элементов выделенных j–го и r–го столбцов матрицы (они обозначены вариант I и вариант II). Рассмотрим все возможные варианты расположения j–й и r–й строк матрицы $X=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ относительно ненулевых элементов j–го столбца этой матрицы. Так как $j<r$, то возможны только следующие варианты

(а) $1\leqslant j<r\leqslant w_j$, (в) $1\leqslant j\leqslant w_j<w_j+k_j<r$, (д) $w_j<j\leqslant w_j+k_j<r<\leqslant N$,

(б) $1\leqslant j\leqslant w_j<r\leqslant w_j+k_j$, (г) $w_j<j<r\leqslant w_j+k_j$, (е) $w_j+k_j<j<r\leqslant N$.

Аналогичны все возможные варианты расположения j–й и r–й строк матрицы $X=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ относительно ненулевых элементов r–го столбца этой матрицы, а именно, эти варианты описываются неравенствами

(ж) $1\leqslant j<r\leqslant w_r$, (и) $1\leqslant j\leqslant w_r<w_r+k_r<r\leqslant N$, (л) $w_r<j\leqslant w_r+k_r<r\leqslant N$,

(з) $1\leqslant j\leqslant w_r<r\leqslant w_r+k_r$, (к) $w_r<j<r\leqslant w_r+k_r$, (м) $w_r+k_r<j<r\leqslant N$.

Учитывая неравенства (1'),(2') и исходя из неравенств (а)–(м), получаем все возможные варианты расположения j–й и r–й строк данной матрицы относительно ненулевых элементов j–го и r–го столбцов матрицы. Не составляет сложности рассмотреть все эти варианты и сделать вывод, что в условиях леммы расположение j–й и r–й строк исходной матрицы относительно ненулевых элементов этих столбцов описывается неравенствами (а)–(р) лемм 1, 2 и только ими.■

Утверждение 1.Предположим, что в матрице $X=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$, которая является УЛМ или отличается от УЛМ только порядком расстановки столбцов, существуют два столбца с номерами j и r (j<r), такие что их первоначальные номера, соответственно α и β, удовлетворяют неравенству $\alpha<\beta$. Тогда, если матрица $\tilde{X}=\|x_{il}\|$ $(i,l=\overline{1,N})$ такова,что $\tilde{X}=P_{jr}(X)$ и функция F, определяемая по формуле (2.1), то $F(X)<F(\tilde{X})$.
Утверждение 1 непосредственно следует из лемм 1 – 3.

Утверждение 2. Любая перестановка может быть получена из нормаль–

ной перестановки посредством нескольких инверсионных транспозиций.

Доказательство. Применим индукцию. Для n=2 утверждение тривиально. Пусть n>2 и для перестановок (n−1) элемента утверждение доказано. Пусть (1,2,...,n) и $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ две данные перестановки. Если $\beta_n=n$, то (1,2,...,n−1) и $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})$ отличаются только порядком и, в силу индукционного предположения, посредством нескольких инверсионных транспозиций можно перейти от (1,2,...,n−1) к $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-1})$ и, следовательно, от (1,2,...,n) к $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. Пусть теперь $\beta_n\neq n$, тогда для некоторого $i\neq n$ $\beta_i=n$. В силу доказанного, посредством нескольких инверсионных транспозиций можно перейти от (1,2,...,n) к $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},n)$, такой, что $\alpha_i=\beta_n$ и $\alpha_j=\beta_j$ для $j\neq i$, $j=\overline{1,n-1}$. Сделав в $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1},n)$ инверсионную транспозицию (α_i,n), получим перестановку $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$. Следовательно, от (1,2,...,n) к $(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ можно перейти посредством нескольких инверсионных транспозиций.∎

Доказательство теоремы. Поставим в соответствие каждому столбцу матриц $X=\|x_{ij}\|$ и $Z=\|z_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ его первоначальный номер. Тогда матрице X соответствует нормальная перестановка (1,2,...,N), матрице Z – некая перестановка $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_N)$. Из утверждения 2 следует, что существует упорядоченная последовательность из K преобразований $P_{i_\nu j_\nu}$ $(\nu=\overline{1,K})$, такая, что

1) $$X \xrightarrow{P_{i_1j_1}} X_1=P_{i_1j_1}(X) \xrightarrow{P_{i_2j_2}} X_2=P_{i_2j_2}(X_1) \xrightarrow{P_{i_3j_3}} \ldots$$
$$\ldots \xrightarrow{P_{i_{k-1}j_{k-1}}} X_{k-1}=P_{i_{k-1}j_{k-1}}(X_{k-2}) \xrightarrow{P_{i_kj_k}} Z\ ;$$

2) каждое преобразование $P_{i_\nu j_\nu}$ $(\nu=\overline{1,k})$ переставляет i_ν–й и j_ν–й столбцы матрицы, полученной в результате предшествующего преобразования $P_{i_{\nu-1}j_{\nu-1}}$, причем $i_\nu<j_\nu$ и первоначальные номера i_ν–го j_ν–го столбцов – α_ν и β_ν, соответственно, удовлетворяют неравенству $\alpha_\nu<\beta_\nu$.

Учитывая утверждение 1, получаем $F(X)<F(X_1)<\ldots<F(X_{k-1})<F(Z)$, т.е. при выполнении условий теоремы получаем $F(X)<F(Z)$.∎

Следствие из теоремы. Пусть R – множество матриц, состоящее из УЛМ $X=\|x_{ij}\|$ $(i,j=\overline{1,N})$ и матриц, отличающихся от матрицы X только порядком расстановки столбцов. Тогда, если F – функция, определяемая по формуле (2.1), то $\min\limits_{Z\in R} F(Z)=F(X)$.

Доказательство. Так как $R=\{X,Z_\gamma\}$ $(\gamma=\overline{1,N!-1})$ и по теореме $F(X)<F(Z_\gamma)$ $\forall\ \gamma=\overline{1,N!-1}$, то $\min\limits_{Z\in R} F(Z)=F(X)$. ■

ЛИТЕРАТУРА

1. Методы и алгоритмы решения транспортной задачи.Вып.1. М.:Госстатиздат,1963, 151 с.
2. Розенберг Г.С. Модели в фитоценологии. М:Наука,1984, 265 с.
3. Свирежев Ю.М.,Логофет Д.О. Устойчивость биологических сообществ. М.Наука,1978, 352 с.
4. Уиттекер Р. Сообщества и экосистемы. М:Прогресс,1980, 327 с.
5. Handbook of vegetation science. Part 5. The Hague,Junk, 1973, 737 p.

Г.А. Александров, Л.Л. Голубятников

Моделирование экологических рядов

Редактор С.Е.Химачева.. Техн.редактор П.А. Швайко
Корректура авторов

Подписано в печать 7.02.91. Заказ 62
Тираж 301 экз. Формат бумаги 60*90 1/16
Уч.–изд.л.1,08. Усл.–печ.л.1,5. Цена 20 коп.

Отпечатано на ротапринтах в ВЦ АН СССР
117333, Москва, ул.Вавилова, 40